Pisot数によるβ-展開の周期性について (解析的整数論とその周辺)

伊藤, 俊次

数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 163-168

Pisot数によるβ-展開の周期性について

伊藤俊次（金沢大）
Shunji ITO (Kanazawa Univ.)

Pisot数 $\beta > 1$ による $x \in [0,1)$ の β-展開

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{\beta^n}$$

の digit 列 $(a_1(x)\, a_2(x) \cdots)$ が x がどのような条件をみたすとき 純周期的となるか，について多くの研究が積みあげられて来たが，その必要十分の証明が簡素化されたのでここに報告する.

0. β-展開の定義

$\beta > 1$ に対して定まる β-変換 $T_\beta : [0,1) \to [0,1)$ を $T_\beta x = \beta x - [\beta x]$ とし digit 関数 $a(x)$ を

$$a(x) = \begin{cases} i & \text{if } \left[\frac{i}{\beta}, \frac{i+1}{\beta}\right) \quad i = 0, \ldots, [\beta]-1 \\ [\beta] & \text{if } \left[\frac{[\beta]}{\beta}, 1\right) \end{cases}$$

とする. このとき $x \in [0,1)$ の digit 列 $(a_1(x)\, a_2(x) \ldots)$ は

$$a_n(x) := a(T^{n-1} x)$$

によって与える。このとき x は digit 列をもちいて

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{\beta^n}$$

と β-展開されることは容易に分る.

1. Pisot 数と Schmidt の結果

$\beta > 1$ が Pisot 数であるとは β は代数的整数で その共役数の絶対値が1より小さいときをいう。
このとき 次の結果が知られている。

> 定理 (Schmidt, Bull London Math. Soc. 12 (1980))
>
> $\beta > 1$, が Pisot 数のとき, 以下がなりたつ:
>
> $$\{x \in [0,1) \mid (a_1(x).a_2(x) \cdots) \text{ は periodic}\} = \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1)$$

このノートでは この定理から自然に生じる「純周期性の必十条件」について述べるとともに Schmidt の定理の別証明に触れる。

2. Digit 列からつくられる記号力学系

$$\varphi(x) = (a_1(x)\ a_2(x) \cdots\cdots) \in \prod_{n=1}^{\infty}\{0,1,\ldots,[\beta]\}$$ とし

$$(a_1^*.a_2^* \ldots) := \lim_{x \to 1} \varphi(x)$$

と定義する。 ($1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^*}{\beta^n}$ がなりたつ。又 β が Pisot 数なら $(a_1^*, a_2^*, \ldots)$ は周期的であることが知られている)

$$\Omega_\beta := \{(\cdots a_{-k}\ a_{-k+1} \cdots a_{-1}\ a_0\ a_1\ a \ldots) \mid (a_j\ a_{j+1} \cdots) \leqq (a_1^*\ a_2^* \ldots),\ \forall j \in \mathbb{Z}\}$$

とするとき, Ω_β は $\prod_{n=-\infty}^{\infty}\{0,1,\ldots,[\beta]\}$ の Shift 不変な closed set となる

(Ω_β は T_β から定まる記号力学系の natural extension にあたる)

$\Omega_\beta \ni (\cdots a_{-1}\ a_0\ a_1\ a_2 \cdots\cdots)$ に対して
$u = (a_1\ a_2\ a_3 \cdots)$, $v = (a_0, a_{-1}, a_{-2}, \cdots)$
と定義し (v, u) を $(\cdots a_{-1}\ a_0\ a_1\ a_2 \cdots)$ と同一視する。

3. Realization of Ω_β

以後 $\beta>1$ を Pisot 数とする。その共役数を

$$\beta=\beta_1,\ \underbrace{\beta_2, \cdots, \beta_r}_{\text{実共役数}},\ \underbrace{\beta_{r+1},\ \beta_{r+2}=\overline{\beta_{r+1}},\ \beta_{r+2}, \beta_{r+3}=\overline{\beta_{r+2}}\ \cdots\ \beta_{r+2s}=\overline{\beta_{r+2s-1}}}_{\text{複素共役数}}$$

と記す.

定義 $\rho:\Omega_\beta \to \mathbb{R}^r\times\mathbb{C}^s$ を

$\Omega \ni (v,u)=(\cdots a_{-1}, a_0, a_1\, a_2 \cdots)$ に対して

$$\rho(v,u)=\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\beta_1^{-k},\ -\sum_{k=0}^{-\infty} a_{-k}\beta_2^{-k}, \cdots, \sum_{k=0}^{-\infty} a_{-k}\beta_r^{-k},\ -\sum_{k=0}^{-\infty} a_{-k}\beta_{r+1}^{-k}, \cdots, -\sum_{k=0}^{-\infty} a_{-k}\beta_{r+2s-1}^{-k}\right)$$

$$=(x, y_2, y_3, \cdots, y_r, y_{r+1}, \cdots, y_{r+s})\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{C}^s$$

と定義する。 $\rho(\Omega_\beta)$ は その形式より 有界閉集合で あることが分る。 そこで

定義 $\overline{T}_\beta: K\to K$ を

$$\overline{T}_\beta(x, y_2, \cdots y_r, \cdots, y_{r+s}) := (\beta x - a_1, \beta_2 y_2 - a_1, \cdots \beta_r y_r - a_1, \cdots, \beta_{r+s} y_{r+s} - a_1)$$

と定義する. このとき

proposition 3.1

$$\begin{tikzcd} \Omega_\beta \arrow[r, "\text{shift}"] \arrow[d, "\rho"'] & \Omega_\beta \arrow[d, "\rho"] \\ K \arrow[r, "\overline{T}_\beta"] & K \end{tikzcd}$$

が成りたつ

$\overline{T}_\beta$ の第一座標への制限は T_β に一致すること, 及び $\overline{T}_\beta$ は本質的に bijective であることから $\overline{T}_\beta$ は T_β の natural extension と呼ばれている. さて 主定理を述べる準備が出来た.

定理　$\beta > 1$ を Pisot数でさらに単数とする. このとき
$x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1)$ の β-展開の digit $(a_1(x)a_2(x)\cdots)$
が純周期的である必要十分条件は x の共役数の組
$(x, x_2, \cdots x_r \cdots x_{r+s}) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ が
$(x, x_2, x_r, \cdots x_{r+s}) \in K$
をみたす。

4 証明

定理の証明のスケッチと説明を与えることにする。

(: 純周期 $\Rightarrow$ $(x, x_2, \ldots, x_{r+s}) \in K$ の証明)

$x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1)$ の digit を $(a_1 a_2 \cdots a_L a_1 a_2 \cdots a_L \cdots)$ とする.

$$(v, u) = (\cdots \quad a_1 a_2 \, a_L \; a_1 a_2 \cdots a_L \cdots \quad) \in \Omega_\beta$$

$$u = (a_1 a_2 \cdots \quad) \quad v = (a_L a_{L-1} \; a_1 a_L \cdots \quad)$$

とする. x は

$$x = \frac{a_1}{\beta} + \cdots + \frac{a_L}{\beta^L} + \frac{a_1}{\beta^{L+1}} + \cdots$$
$$= \frac{a_1\beta^{L-1} + a_2\beta^{L-2} + \cdots + a_L}{\beta^L - 1}$$

一方 $\rho(v, u)$ の j番目の値は ρの定義から

$$-(a_L + a_{L-1}\beta_j + a_{L-2}\beta_j^2 + \cdots + a_1\beta_j^{L-1}) - \beta_j^L(a_L + \cdots) - \cdots$$
$$= -(a_L + a_{L-1}\beta_j + \cdots + a_1\beta_j^{L-1})(1 + \beta_j^L + \beta_j^{2L} + \cdots)$$
$$= \frac{-(a_L + a_{L-1}\beta_j + \cdots + a_1\beta_j^{L-1})}{1 - \beta_j^L}$$
$$= x_j \quad (x \text{ の } j \text{ 番目の共役数})$$

よって $\rho(v, u) = (x, x_2, \cdots x_{r+s})$,
と $\rho(v, u) \in K$ より
x の digit 列が純周期ならば $(x, x_2, \ldots, x_{r+s}) \in K$
が示せた。

($x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1)$, $(x, x') \in K \Rightarrow x$ の digit 列が純周期の証明)

x の共役数の組 $(x, x_2, \cdots, x_{r+s})$ を簡単に (x, x') と記すことにする.

$x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1)$ に対して $\exists b \in \mathbb{N}$: $bx \in \mathbb{Z}[\beta]$, そこで

$$R_b := \{(y, y') : y \in b^{-1}\mathbb{Z}[\beta]\} \cap K$$

と定義する。このとき K は bounded より R_b は有限集合となる. (もちろん $(x, x') \in R_b$)

これから主張したいことは「$\overline{T}_\beta : R_b \to R_b$ が well defined で bi-jective」であることである.

(i) $(y, y') \in R_b$ とする

$y = \dfrac{m_0 + m_1\beta + \cdots + m_d\beta^{d-1}}{b}$, $m_i \in \mathbb{Z}$ と記されることから

$\beta y = \dfrac{\beta m_0 + m_1\beta^2 + \cdots + m_d\beta^d}{b}$ より

$\beta y - a_1 \in b^{-1}\mathbb{Z}(\beta)$ (a_1 は y の β-展開の第1 digit)

よって $\overline{T}_\beta(y, y') = (T_\beta y, (T_\beta y)')$ がなりたつ

さらに $(y, y') \in R_b$ ならば $\overline{T}_\beta(y, y') \in R_b$

(ii) $\overline{T}_\beta : R_b \to R_b$ が surjective であること

$(y, y') \in R_b$ とする. このとき $\exists (v, u) \in \Omega_\beta$:

$\rho(v, u) = (y, y')$, $v = (v_0 v_1 v_2 \cdots)$, $u = (u_1 u_2 \cdots)$

そこで $z = \beta^{-1}(y + v_0)$ とおく. このとき β は単数なので

$z = \beta^{-1}(y + v_0) \in b^{-1}\mathbb{Z}[\beta]$ (ここで β の単数条件をもちいている)

一方

$\rho((v, u)$ の1回ずらし$) = (z, z') \in K$

すなわち $\overline{T}_\beta(z, z') = (y, y')$

よって $\overline{T}_\beta$ は R_b 上 surjective.

以上より $\overline{T}_\beta$ が R_b 上で bijective。よって $(x,x')\in R_b$ は
$\overline{T}_\beta$ について純周期，すなわち $\exists n_0 : \overline{T}_\beta^{\,n_0}(x,x')=(x,x')$
よって x は T_β に関して純周期的。 □

5. Remark

<u>Remark 1</u> ここでの主定理から Schmidtの定理を得ることはさほど難しくはない。 $x\in\mathbb{Q}(\beta)\cap[0,1)$ の仮定のもと

$$(x,x')\in[0,1)\times\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{C}^{s}$$

そこで $\overline{T}_\beta(x,x')=(\beta x-a_1,\beta_2x-a_1,\cdots,\beta_{r+s}x-a_1)$
を $[0,1)\times\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{C}^{s}$ 上の変換と考える。これは bijective ではないが $\exists N=N(x)$: $\overline{T}^{N}(x,x')\in K$ が示せる。
これは x のdigitの周期性に外ならない。

<u>Remark 2</u> 考えてみれば証明は簡単にできたが集合 $K=\rho(\Omega_\beta)$ の姿がみえない。実はこれが fractal 境界をもつ領域であることが知られている。とするならば

$$(x,x')\in K$$

かどうかは判定出来ない(?)。この意味で面白い定理ともいえる。

詳しい内容は Rao-ITO「purely periodic β-expansion with Pisot Unit base (to appear in Proceedings AMS.) をみてほしい。